COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 2012

Clasa a VII-a

1. a) După raționalizări și reducerea termenilor asemenea, obținem că $S=\sqrt{n+1}-1$. Cum $S=2012$, deducem că $n=2013^2-1$.

b) Folosind formula $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, rezultă că $A\cdot B=1$. Pe de altă parte,

$$B=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{4}}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}\cdot\ldots\cdot\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}+\sqrt{2n-1}},$$

așadar $B>1$. În aceste condiții, $A<1$ și atunci $A<B$.

2. Observăm că $\frac{p_1-2}{p_1+1}=\frac{p_2-2}{p_2+1}\Leftrightarrow p_1=p_2$, prin urmare valori distincte ale lui p conduc la valori distincte ale fracțiilor $\frac{p-2}{p+1}$. Cum p poate lua 49 de valori, rezultă că mulțimea B are 49 de elemente. Dacă presupunem că $\frac{n_1^2+n_1+2}{n_1^2-n_1+2}=\frac{n_2^2+n_2+2}{n_2^2-n_2+2}$ obținem, după calcule, că $(n_1n_2-2)(n_1-n_2)=0$. Rezultă că numai $n_1=1$ și $n_2=2$ conduc la o aceeași valoare a fracției $\frac{n^2+n+2}{n^2-n+2}$. Întrucât n poate lua 50 de valori, deducem că vom avea 49 fracții distincte de forma $\frac{n^2+n+2}{n^2-n+2}$, adică A are tot 49 de elemente și de aici urmează concluzia problemei.

3. Folosind teorema fundamentală a asemănării, din $EF \| BN$ şi $EF \| MC$ obţinem că $\frac{BN}{FE} = \frac{BC}{CE}$, respectiv $\frac{MC}{FE} = \frac{BC}{BE}$. Astfel, $\frac{BN}{FE} + \frac{MC}{FE} = \frac{BC}{CE} + \frac{BC}{BE}$, de unde $BN + MC =$ $= FE \cdot \left(2 + \frac{BE}{CE} + \frac{CE}{BE}\right)$. Însă $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2,\ \forall a, b > 0$, prin urmare $BN + MC \geq 4EF$.

4. a) Fie $\{O\} = AC \cap BD$ şi M mijlocul segmentului BC. Atunci OM este linie mijlocie în ΔPQR, deci $OM = \frac{1}{2} RQ$ şi $OM \| RQ$. Pe de altă parte, OM este mediană a ipotenuzei în ΔBOC dreptunghic, aşadar $OM = \frac{1}{2} BC$. Deducem astfel că $RQ = BC = AD$.

b) Dacă $\{T\} = MO \cap AD$, atunci $\sphericalangle MBO \equiv \sphericalangle MOB \equiv \sphericalangle DOT$. Însă $\sphericalangle OCB \equiv \sphericalangle TDO$, prin urmare $m(\sphericalangle OTD) = m(\sphericalangle BOC) = 90^\circ$. Rezultă că $MT \perp AD$ şi, cum $MT \| RQ$, obţinem că $RQ \perp AD$.